Mecánica Clásica General

Alejandro A. Torassa

Licencia Creative Commons Atribución 3.0
(2014) Buenos Aires, Argentina
atorassa@gmail.com

Resumen

Este trabajo presenta una mecánica clásica general que es invariante bajo transformaciones entre sistemas de referencia y que puede ser aplicada en cualquier sistema de referencia (rotante o no rotante) (inercial o no inercial) sin necesidad de introducir fuerzas ficticias.

Introducción

La posición $\mathbf{r}_i$, la velocidad $\mathbf{v}_i$ y la aceleración $\mathbf{a}_i$ de una partícula i de masa m_i, están dadas por:

$$\mathbf{r}_i = (\mathbf{r}_i)$$

$$\mathbf{v}_i = d(\mathbf{r}_i)/dt$$

$$\mathbf{a}_i = d^2(\mathbf{r}_i)/dt^2$$

donde $\mathbf{r}_i$ es el vector posición de la partícula i.

Y la posición dinámica $\breve{\mathbf{r}}_i$, la velocidad dinámica $\breve{\mathbf{v}}_i$ y la aceleración dinámica $\breve{\mathbf{a}}_i$, están dadas por:

$$\breve{\mathbf{r}}_i = \int\int (\mathbf{F}_i/m_i)\; dt\; dt$$

$$\breve{\mathbf{v}}_i = \int (\mathbf{F}_i/m_i)\; dt$$

$$\breve{\mathbf{a}}_i = (\mathbf{F}_i/m_i)$$

donde $\mathbf{F}_i$ es la fuerza resultante que actúa sobre la partícula i.

Ecuaciones de Movimiento

Dadas dos partículas i y j entonces para un sistema de referencia S las ecuaciones de movimiento son:

$$\tfrac{1}{2}\, m_i m_j \left[(\mathbf{r} \,\S\, \mathbf{r}_{ij}) \cdot (\mathbf{r} \,\S\, \mathbf{r}_{ij}) - (\mathbf{r} \,\S\, \breve{\mathbf{r}}_{ij}) \cdot (\mathbf{r} \,\S\, \breve{\mathbf{r}}_{ij}) \right] = 0$$

$$\tfrac{1}{2}\, m_i m_j \left[(\mathbf{r} \,\S\, \mathbf{r}_{ij}) \cdot (\mathbf{r} \,\S\, \mathbf{v}_{ij}) - (\mathbf{r} \,\S\, \mathbf{r}_{ij}) \cdot \int (\mathbf{r} \,\S\, \breve{\mathbf{a}}_{ij})\, dt \right] = 0$$

$$\tfrac{1}{2}\, m_i m_j \left[(\mathbf{r} \,\S\, \mathbf{v}_{ij}) \cdot (\mathbf{r} \,\S\, \mathbf{v}_{ij}) + (\mathbf{r} \,\S\, \mathbf{a}_{ij}) \cdot (\mathbf{r} \,\S\, \mathbf{r}_{ij}) - 2 \int (\mathbf{r} \,\S\, \breve{\mathbf{a}}_{ij}) \cdot d(\mathbf{r} \,\S\, \mathbf{r}_{ij}) - (\mathbf{r} \,\S\, \breve{\mathbf{a}}_{ij}) \cdot (\mathbf{r} \,\S\, \mathbf{r}_{ij}) \right] = 0$$

donde $\mathbf{r}_{ij} = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j$, $\mathbf{v}_{ij} = \mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j$, $\mathbf{a}_{ij} = \mathbf{a}_i - \mathbf{a}_j$, $\breve{\mathbf{r}}_{ij} = \breve{\mathbf{r}}_i - \breve{\mathbf{r}}_j$, $\breve{\mathbf{a}}_{ij} = \breve{\mathbf{a}}_i - \breve{\mathbf{a}}_j$, m_i y m_j son las masas de las partículas i y j, $\mathbf{r}_i$, $\mathbf{r}_j$, $\mathbf{v}_i$, $\mathbf{v}_j$, $\mathbf{a}_i$ y $\mathbf{a}_j$ son las posiciones, las velocidades y las aceleraciones de las partículas i y j, y $\breve{\mathbf{r}}_i$, $\breve{\mathbf{r}}_j$, $\breve{\mathbf{a}}_i$ y $\breve{\mathbf{a}}_j$ son las posiciones dinámicas y las aceleraciones dinámicas de las partículas i y j.

$\mathbf{r}$ es un vector posición definido por dos puntos fijos 1 y 2 del sistema de referencia S ($\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$) en el que la aceleración dinámica del punto 1 es igual a la aceleración dinámica del punto 2 ($\breve{\mathbf{a}}_1 = \breve{\mathbf{a}}_2$)

$\mathbf{r}$ es invariante bajo transformaciones entre sistemas de referencia.

§ puede cambiarse por los siguientes operadores:

$*$ Producto primero excluido: $\vec{A} * \vec{B} = \vec{B}$

$\cdot$ Producto punto: $\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}||\vec{B}| \cos\theta$

$\times$ Producto cruz: $\vec{A} \times \vec{B} = |\vec{A}||\vec{B}| \operatorname{sen}\theta\, \hat{n}$ (dirección: regla mano derecha)

$:$ Producto punto vectorial: $\vec{A} : \vec{B} = |\vec{A}||\vec{B}| \cos\theta\, \hat{n}$ (dirección: igual que $\vec{A}$)

$\dot{\times}$ Producto cruz escalar: $\vec{A} \,\dot{\times}\, \vec{B} = |\vec{A}||\vec{B}| \operatorname{sen}\theta$ (signo: regla mano derecha)

Nota: En este trabajo la siguiente regla es válida:

(escalar)$\cdot$(escalar) = (escalar) (escalar)

Sistemas de Referencia

Las magnitudes $\breve{\mathbf{r}}_i$, $\breve{\mathbf{v}}_i$ y $\breve{\mathbf{a}}_i$ son invariantes bajo transformaciones entre sistemas de referencia.

En cualquier sistema de referencia $\mathbf{r}_{ij} = \breve{\mathbf{r}}_{ij}$. Por lo tanto, $\mathbf{r}_{ij}$ es invariante bajo transformaciones entre sistemas de referencia.

En cualquier sistema de referencia no rotante $\mathbf{v}_{ij} = \breve{\mathbf{v}}_{ij}$ y $\mathbf{a}_{ij} = \breve{\mathbf{a}}_{ij}$. Por lo tanto, $\mathbf{v}_{ij}$ y $\mathbf{a}_{ij}$ son invariantes bajo transformaciones entre sistemas de referencia no rotantes.

En cualquier sistema de referencia inercial $\mathbf{a}_i = \breve{\mathbf{a}}_i$. Por lo tanto, $\mathbf{a}_i$ es invariante bajo transformaciones entre sistemas de referencia inerciales. Cualquier sistema de referencia inercial es un sistema de referencia no rotante.

En el sistema de referencia universal $\mathbf{r}_i = \breve{\mathbf{r}}_i$, $\mathbf{v}_i = \breve{\mathbf{v}}_i$ y $\mathbf{a}_i = \breve{\mathbf{a}}_i$. Por lo tanto, el sistema de referencia universal es un sistema de referencia inercial.

El sistema de referencia universal es un sistema de referencia fijo al centro de masa del universo (si la fuerza resultante que actúa sobre el centro de masa del universo es siempre cero)

Observaciones

Las ecuaciones de movimiento son también ecuaciones de conservación.

Las ecuaciones de movimiento son invariantes bajo transformaciones entre sistemas de referencia.

Las ecuaciones de movimiento pueden ser aplicadas en cualquier sistema de referencia (rotante o no rotante) (inercial o no inercial) sin necesidad de introducir fuerzas ficticias.

Las ecuaciones de movimiento serían válidas incluso si la tercera ley de movimiento de Newton fuera falsa en un sistema de referencia inercial.

Las ecuaciones de movimiento serían válidas incluso si las tres leyes de movimiento de Newton fueran falsas en un sistema de referencia no inercial.

Las ecuaciones de movimiento son ecuaciones de transformación entre sistemas de referencia y pueden obtenerse desde la ecuación general de movimiento (**A. Torassa**, Ecuación General de Movimiento)

Anexo

Trabajo, K y U

$W_{ij} = {}^1\!/_2\; m_i\, m_j \left[\, 2 \int_1^2 (\mathbf{r} \,\S\, \breve{\mathbf{a}}_{ij}) \cdot d(\mathbf{r} \,\S\, \mathbf{r}_{ij}) + \Delta\, (\mathbf{r} \,\S\, \breve{\mathbf{a}}_{ij}) \cdot (\mathbf{r} \,\S\, \mathbf{r}_{ij}) \,\right]$

$W_{ij} = \Delta\, K_{ij}$

$\Delta\, K_{ij} = \Delta\; {}^1\!/_2\; m_i\, m_j \left[\, (\mathbf{r} \,\S\, \mathbf{v}_{ij}) \cdot (\mathbf{r} \,\S\, \mathbf{v}_{ij}) + (\mathbf{r} \,\S\, \mathbf{a}_{ij}) \cdot (\mathbf{r} \,\S\, \mathbf{r}_{ij}) \,\right]$

$\Delta\, U_{ij} = -\; {}^1\!/_2\; m_i\, m_j \left[\, 2 \int_1^2 (\mathbf{r} \,\S\, \breve{\mathbf{a}}_{ij}) \cdot d(\mathbf{r} \,\S\, \mathbf{r}_{ij}) + \Delta\, (\mathbf{r} \,\S\, \breve{\mathbf{a}}_{ij}) \cdot (\mathbf{r} \,\S\, \mathbf{r}_{ij}) \,\right]$

Principio de Mínima Acción

$\delta \int_1^2 L_{ij}\; dt = 0$

$\delta \int_1^2 (T_{ij} - V_{ij})\; dt = 0$

$T_{ij} = +\; {}^1\!/_2\; m_i\, m_j \left[\, (\mathbf{r} \,\S\, \mathbf{v}_{ij}) \cdot (\mathbf{r} \,\S\, \mathbf{v}_{ij}) + (\mathbf{r} \,\S\, \mathbf{a}_{ij}) \cdot (\mathbf{r} \,\S\, \mathbf{r}_{ij}) \,\right]$

$V_{ij} = -\; {}^1\!/_2\; m_i\, m_j \left[\, 2 \int (\mathbf{r} \,\S\, \breve{\mathbf{a}}_{ij}) \cdot d(\mathbf{r} \,\S\, \mathbf{r}_{ij}) + (\mathbf{r} \,\S\, \breve{\mathbf{a}}_{ij}) \cdot (\mathbf{r} \,\S\, \mathbf{r}_{ij}) \,\right]$

Grupo de Ecuaciones Invariantes

${}^1\!/_2\; m_i\, m_j \left[\, (\mathbf{r} \,\S\, \mathbf{r}_{ij}) \cdot (\mathbf{r} \,\S\, \mathbf{r}_{ij}) \,\right] =$ Invariante desde S a S’

${}^1\!/_2\; m_i\, m_j \left[\, (\mathbf{r} \,\S\, \mathbf{r}_{ij}) \cdot (\mathbf{r} \,\S\, \mathbf{v}_{ij}) \,\right] =$ Invariante desde S a S’

${}^1\!/_2\; m_i\, m_j \left[\, (\mathbf{r} \,\S\, \mathbf{v}_{ij}) \cdot (\mathbf{r} \,\S\, \mathbf{v}_{ij}) + (\mathbf{r} \,\S\, \mathbf{a}_{ij}) \cdot (\mathbf{r} \,\S\, \mathbf{r}_{ij}) \,\right] =$ Invariante desde S a S’